MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 9
12.06.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*

   Die Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$
   spannen einen Unterraum U im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ auf. Berechnen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement von U im $\mathbb{R}^4$.
   Hinweis: Wegen $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$ wissen Sie schon die Dimension des orthogonalen Komplementes von U. Benutzen Sie Satz 9.29.

2. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*

   Man zeige, dass es auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ genau ein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, bezüglich dem die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis bilden, und gebe $\sigma(x, y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^2$ explizit an.
   Hinweis: Eine ähnliche Aufgabe gab es schon auf dem letzten Tutoriumsblatt sowie in der Zentralübung. Finden Sie zuerst eine symmetrische Bilinearform, welche die gewünschten Eigenschaften besitzt und prüfen Sie danach explizit nach, dass diese Bilinearform positiv definit ist.

3. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1999).* Im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, \circ)$ seien
   $$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
   sowie $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ und $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ gegeben.

   a) Man gebe jeweils eine Basis von U und V an.
      Hinweis: $\dim(U) = 3, \dim(V) = 2$.

   b) Man bestimme eine Basis von $U^\perp$.

   c) Man zeige unter Verwendung von b), daß $V \not\subseteq U$ gilt.
      Hinweis: Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in V \ , v \neq 0$ gibt, so dass $v \circ w \neq 0$, für ein $w \in U^\perp \ , w \neq 0$ gilt.

d) Man bestimme mit c) die Dimension von $U + V$ und schließe daraus auf die Dimension von $U \cap V$.

4. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2009*

   Es sei W ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt φ. Für $U \subset W$ definiert man

$$U^{\perp} = \{w \in W : \varphi(u, w) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

   Zeigen Sie, dass für alle Untervektorräume U, $V \subset W$ gilt:

   a) $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$.
   Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $(U + V)^{\perp} \subset U^{\perp}$ und $(U + V)^{\perp} \subset V^{\perp}$ gilt. Damit erhalten Sie $(U + V)^{\perp} \subset U^{\perp} \cap V^{\perp}$.
   Zeigen Sie nun, dass $U^{\perp} \cap V^{\perp} \subset (U + V)^{\perp}$ gilt. Geben Sie sich dazu einen Vektor $w \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$ vor und zeigen Sie, dass $w \in (U + V)^{\perp}$ folgt.
   Aus $(U + V)^{\perp} \subset U^{\perp} \cap V^{\perp}$ und $U^{\perp} \cap V^{\perp} \subset (U + V)^{\perp}$ erhalten Sie schließlich $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$.

   b) $(U \cap V)^{\perp} \supset U^{\perp} + V^{\perp}$.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass $U^{\perp} \subset (U \cap V)^{\perp}$ und $V^{\perp} \subset (U \cap V)^{\perp}$ gilt.